***Apellidos y nombre*** ......................................................................................................................

***Temas 1, 2. Control. Matrices y determinantes.***

***1*** **.** Halla todas las matrices X, no nulas, de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = X$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{array}\right| \begin{array}{l} a(a-1)=0;\ a=0;\ a=1 \\ \boxed{a=0;\ 0+b=1;\ b=1 \ \big|\ 1^2=1} \\ \boxed{a=1;\ 1+b=1;\ b=0 \ \big|\ 0^2=0} \end{array}$$

Luego $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Nota**.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre***..........................................................................................................

**2.** Si la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ satisface la igualdad $A^2+xA+yI=0$, halla los valores numéricos de $x$ e $y$ ($I$ representa la matriz identidad de orden 2 y $0$ la matriz nula de orden 2)

***Solución. Versión 1***

Calculamos $A^2$:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10\\ -15 & 10\end{pmatrix}$$

Así:

$$A^2+xA+yI=\begin{pmatrix}-5 & 10\\ -15 & 10\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+x+y & 10+2x\\ -15-3x & 10+4x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Luego, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{r}-5+x+y=0\\ 10+2x=0\\ -15-3x=0\\ 10+4x+y=0\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\to\quad y=5-x=5-(-5)=10\\ \to\quad x=-5\\ \to\quad x=-5\\ \to\quad y=-10-4x=-10+20=10\end{array}$$

Por tanto: $x=-5$; $y=10$

**Nota.**- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre***………………………………………………………………………………………………

***Solución. Versión 2***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^2 + x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2x \\ -3x & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -5 + x + y = 0 \\ 10 + 2x = 0 \\ -15 - 3x = 0 \\ 10 + 4x + y = 0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{x = -5}$

$-5 - 5 + y = 0 \ ; \ \boxed{y = +10}$

$-15 - 3\cdot(-5) = 0$ ✓

$10 + 4\cdot(-5) + 10 = 0$ ✓

**Nota**.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

**Apellidos y nombre**.......................................................................................................................

***3.*** a) Definición de menor de un elemento, adjunto de un elemento y determinante de una matriz (3 puntos)

b) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ (7 puntos)

a) Menor de un elemento $a_{ij}$: Determinante que resulta de tachar en una matriz cuadrada la fila 'i' y la columna 'j'

Adjunto: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

donde $M_{ij}$ es el menor de $a_{ij}$

Determinante:

$$|A| = \sum_{\sigma \in P(n)} \operatorname{Sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

b) $$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3x-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & x & x \\ 1 & x & -1 & x \\ 1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = (3x-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3x-1) \cdot (-1-x)^3 = 0 \qquad 3x-1=0 \,;\ \boxed{x = \frac{1}{3}} \qquad -1-x=0 \,;\ \boxed{x=-1}$$

**Nota**.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre***..............................................................................................................

**4.** a) Define el concepto de rango de una matriz. Describe la relación del concepto anterior con los menores de la matriz. (2 puntos)

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1+a \end{pmatrix}$. Estudia el rango de A y B según los valores del parámetro a. (8 puntos)

a) Rango es el nº máximo de vectores fila o columna l.i.

El rango de una matriz es el orden máximo de menores $\neq 0$ que contiene.

b) A: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2a - 1 = 0;\ 2a = -1;\ a = \frac{-1}{2}$

$a = -\frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

| a | Rg A |
|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | 2 |
| $\neq -\frac{1}{2}$ | 3 |

B: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0;\ a = \frac{-1}{2}$

$a = \frac{-1}{2}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (4 - 3 - 1) = 0$

| a | Rg B |
|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | 2 |
| $\neq -\frac{1}{2}$ | 3 |

**Nota.**- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre*****.........................................................................................................**

**5.** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

a) Resuelve la ecuación matricial: XA + 2B = I, donde:

I es la matriz unidad de orden 3 y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Demuestra que: $A^3 + I = O$ –matriz nula–.

c) Calcula de manera razonada $A^9$

a) $XA+2B=I$

$$X=(I-2B)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}= \quad [1]$$

$A^{-1}$ :

$A_{11}=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1$ ; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=1$ ; $A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-1$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=0$ ; $A_{22}=+\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4$ ; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-3$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}=1$ ; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=4$ ; $A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-3$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=+15+12-16-12=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,Adj(A)^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[1]=X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -5 & -4 & 0 \\ -3 & 11 & 17 \end{pmatrix}}$$

**Nota.**- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

*Apellidos y nombre*............................................................................................................

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$A^3 + I = 0$

c) $A^3 + I = 0 \; ; \; A^3 = -I \; ; \; \boxed{A^9 = (-I)^3 = -I}$

**Nota**.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.